Konvergenz einer Zahlenfolge

Eine Zahlenfolge konvergiert, wenn sie einen Grenzwert hat.

(Wenn man schon wüsste, was ein Grenzwert ist, wäre das eine Definition. So ist es bestenfalls ein erster Schritt zum Verständnis.)

Eine Zahlenfolge konvergiert, wenn sie sich ihrem Grenzwert immer weiter nähert

(Immer noch eine ziemlich vage Vorstellung von Konvergenz)

Eine Zahlenfolge konvergiert, wenn sie dem Grenzwert beliebig nahe kommt.

(Hier ist das Wort „beliebig“ entscheidend; „immer näher kommen“ könnte auch bedeuten, dass ein fester Anstand nie unterschritten wird.)

Eine Folge von Zahlen a_n konvergiert, wenn sie mit wachsendem n ihren Grenzwert beliebig nahe kommt.

(Hier zeigt das „wachsende n“ an, dass nicht die Folge dem Grenzwert beliebig nahe kommt, sondern dass sich die Folgen*glieder* dem Grenzwert nähern.)

Eine Zahlenfolge konvergiert, wenn gilt: Wie klein man auch einen Abstand wählt, irgendwann haben alle Folgenglieder einen kleinern Abstand vom Grenzwert.

(Die Vorstellung des „beliebig nahe kommen“ wird hier präziser gefasst durch Vorgabe eines beliebig kleinen Abstands.)

Eine Zahlenfolge konvergiert, wenn gilt: Wie klein man auch immer einen Abstand ε wählt, ab einem gewissen n haben alle Folgenglieder an einen kleineren Abstand als ε vom Grenzwert.

(Jetzt wird der Abstand ε benannt.)

Eine Folge von Zahlen a_n konvergiert gegen den Grenzwert a, wenn gilt: Wie klein man auch immer einen Abstand ε wählt, ab einer gewissen Zahl N gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$.

(Jetzt wird auch präzise gesagt, ab welcher Nummer N der Folgenglieder der vorgegebene Abstand unterschritten wird.)

Eine Folge von Zahlen a_n konvergiert gegen den Grenzwert a, wenn gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein N so, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

(Das ist jetzt die endgültige Definition. Bei dieser kommt auch die Angängigkeit von ε und N zum Ausdruck. Das N hängt von e ab, und kann nicht unabhängig gewählt werden.
Beachten Sie außerdem, mit welchem genialen Trick man das „beliebig nahe“ jetzt formuliert: „Für alle $\varepsilon > 0$“.)

Für alle e gibt es nur endliche viele Ausreißer

In jeder e-Umgebung liegen unendlich viele (falscher Freund!)

Jeweils Beispiele: „echtes“ (generisches), „einfaches“, triviales